TENTAMEN GROEPENTHEORIE
12 APRIL 2012, 9.00–12.00 UUR
Van de onderstaande 8 opgaven moet je er 7 maken. Je mag zelf kiezen welke. Ze tellen alle zeven even zwaar.

(1) Zoals je weet is $\phi(n)$ per definitie het aantal elementen van $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Laat zien dat er oneindig veel gehele getallen $n > 1$ bestaan waarvoor geldt $\phi(n) \in 2 + 10\mathbb{Z}$.

(2) Welke getallen komen voor als de orde van een element van de vermenigvuldiggroep $(\mathbb{Z}/35\mathbb{Z})^*$?

(3) Neem $\tau = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8) \in S_9$.
(a) Schrijf τ als een product van 3-cykels in S_9.
(b) Bepaal het aantal elementen van de conjugatieklasse van τ in S_9.

(4) Bij een priemgetal p definiëren we de groep G bestaande uit 2×2 matrices A met coëfficiënten in $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, met A van de gedaante

$$A = \begin{pmatrix} \overline{1+ap} & \overline{b} \\ \overline{0} & \overline{1-ap} \end{pmatrix},$$

waarbij a en b de gehele getallen doorlopen.
(a) Bewijs dat $\#G = p^3$.
(b) Laat zien dat als $p \neq 2$, dan is G niet commutatief.

(5) Zoals je weet is D_n de symmetriegroep van een regelmatige n-hoek, en D_n wordt voortgebracht door een rotatie ρ die orde n heeft, plus een spiegeling σ, waarbij geldt $\sigma\rho\sigma = \rho^{-1}$. We nemen nu aan dat $n \geq 4$ even is, dus $n = 2m$ voor zekere gehele $m \geq 2$. Neem $H := \{id, \rho^m\} \subset D_n$.
(a) Toon aan dat H een normaaldeler in D_n is.
(b) Gebruik $\overline{\rho} := \rho H \in D_n/H$ en $\overline{\sigma} := \sigma H \in D_n/H$ om aan te tonen, dat $D_n/H \cong D_m$.

(6) Gegeven is een priemgetal p en een geheel getal $n > 0$ en een groep G met $\#G = p^n$. Verder is $\mathcal{Z}(G)$ het centrum van G. Bewijs dat p een deler is van $\#\mathcal{Z}(G)$. Hint: schrijf G als vereniging van conjugatieklassen C_g en ga na, dat C_e niet de enige conjugatieklasse in G is die uit één enkel element bestaat.

(7) In $\mathbb{R}^4$ (opgevat als groep met de gewone coördinaatsgewijze optelling als groepswet en $(0,0,0,0)$ als eenheidselement) hebben we de ondergroep V bestaande uit alle $a(1,2,3,4)+b(2,3,4,5)$ waarin a en b de reële getallen doorlopen.

Bewijs dat $\mathbb{R}^4/V \cong \mathbb{R}^2$.

(8) De ondergroep H van $\mathbb{Z}^4$ bestaat per definitie uit alle viertallen (a,b,c,d) waarvoor geldt dat $a+c$ deelbaar is door 7 en bovendien $b+c+d=0$. Bereken een basis voor H en toon aan dat $\mathbb{Z}^4/H \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.